2011-2012 Öğretim Yılı Bahar Dönemi
Fonksiyonel Analiz Dersi 1. Quiz Soruları

1) (X,d) bir metrik uzay, $f: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$g: X \times X \to \mathbb{R},\ g(x,y) = d(f(x), f(y))$$

fonksiyonununmetrik olması için f nin ...

Çözüm. M1) $g(x,y) = d(f(x), f(y)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ (d metrik),

$g(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

$g(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ olması için $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ olmalı.

$g(x,y) = 0$ olması için f, 1-1 olmalı.

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ olması için f, 1-1 olmalı.

$x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$ dir, çünkü f bir fonksiyon.

M2) $g(x,y) = d(f(x), f(y)) = d(f(y), f(x)) = g(y,x)$

f için kısıt yok.

M3) $g(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(y))$
$= g(x,z) + g(z,y)$.

f için kısıt yok.

Sonuç: f, 1-1 olmalı.

2) (X,d) bir metrik uzay olsun. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $k.d$ ve $k+d$ fonksiyonlarınının ola X üzerinde bir metrik olması için k nın alabileceği değerleri bulunuz.

Çözüm. $k.d$:

M1) $k \neq 0$ için $k.d(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$\underline{k=0}$ için $\forall x,y \in X$, $kd(x,y) = 0$ olur ki; bu metrik aksiyomunu (M1) sağlamaz.

M2) $k.d(x,y) = k.d(y,x)$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ dir.

$\underline{k<0}$ için $kd(x,y) \geq kd(x,z) + kd(y,z)$. olur ki; $k<0$ için (M3) gerçekleşmez.

Sonuç: $k>0$ için $k.d: X \times X \to \mathbb{R}$ bir metrik.

$k+d$: $k=0$ için $k+d=d$ olduğundan $k+d$ metrik,
$\underline{k \neq 0}$ için $(k+d)(x,y)=k+d(x,y)=0 \Leftrightarrow d(x,y)=-k$
$\Leftrightarrow x=y$ olamaz.
Sonuç: $k+d$, sadece $k=0$ için X üzerinde bir metrik.

3) Bir (X,d) metrik uzayında herhangi bir kapalı yuvarın kapalı küme olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (X,d) metrik uzayında keyfi bir $B[a,r]=\{x \in X \mid d(x,a) \leq r\}$ kapalı yuvarı verilsin.

$$X \setminus B[a,r]=\{x \in X \mid d(x,a) > r\}$$

tümleyen kümesinin açık küme olduğunu göstereceğiz.

$\forall x \in X \setminus B[a,r]$ verilsin. $(d(x,a)>r)$.

$\varepsilon := d(x,a)-r$ tanımlansın.

$B(x,\varepsilon) \subset X \setminus B[a,r]$ olduğunu gösterelim.

$y \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow d(x,a) \leq d(x,y)+d(y,a)$

$\Rightarrow d(y,a) \geq d(x,a)-d(x,y) > d(x,a)-\varepsilon = r$

Sonuç: $\forall x \in X \setminus B[a,r]$ için $B(x,\varepsilon) \subset X \setminus B[a,r]$ olacak şekilde $\varepsilon>0$ bulunabildiğinden, $X \setminus B[a,r]$ açık.

4) (X,d) bir metrik uzay, $a \in X$ olsun. Bu takdirde $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x)=d(x,a)$ fonksiyonunun X üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\forall \varepsilon>0$ verildiğinde $d(x,y)<\delta$ olan $\forall x,y \in X$ için

$$|f(x)-f(y)|=|d(x,a)-d(y,a)|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ bulmalıyız.

$$|d(x,a)-d(y,a)| \leq d(x,y) \text{ olduğundan}$$

$\forall \varepsilon>0$ verildiğinde $\delta := \varepsilon$ seçilirse
$d(x,y)<\delta$ olan $\forall x,y \in X$ için $|f(x)-f(y)|=|d(x,a)-d(y,a)| \leq d(x,y) < \varepsilon$